Chapitre 1 : Étude de fonctions polynomiales du second degré

Premières Spécialité Mathématiques

1 Rappel : Fonctions affines

Définition 1. *Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = ax + b$$

avec $a \neq 0$ et b deux réels.
*Le réel a est appelé **coefficient directeur** de f.*
*Le réel b est appelé **ordonnée à l'origine** de f.*

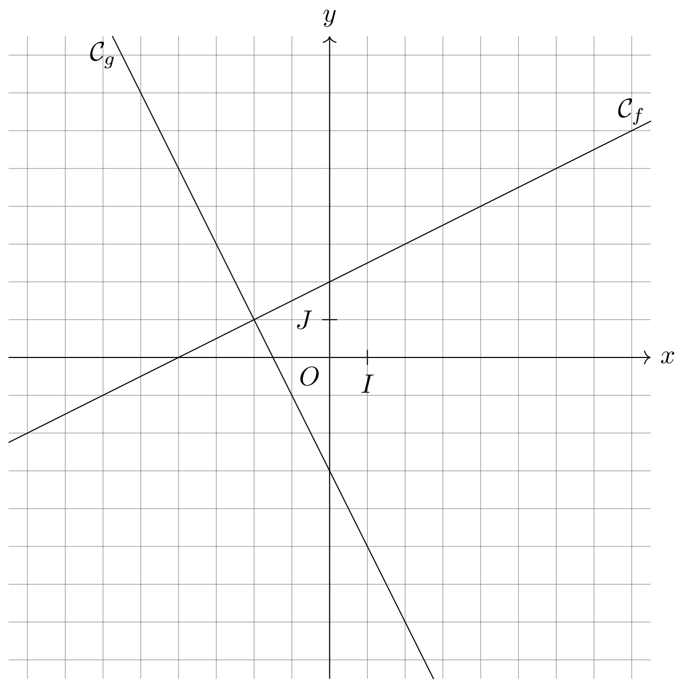
Remarque. *Quand $b = 0$, c'est-à-dire quand $f(x) = ax$, on dit que la fonction est **linéaire**.*

Proposition 1. *Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$ et b deux nombres réels; et $(O; I; J)$ un repère orthonormée. Alors, la courbe représentative de f dans ce repère est une droite.*

Proposition 2. *Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormée, et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est une droite. Alors, f est une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où :*

- *son coefficient directeur a est donnée par la pente de la droite;*
- *son ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.*

Exercice 1. *Sur le repère* $(0; I; J)$ *ci-contre, on a tracé la courbe représentative de deux fonctions affines* f *et* g.



En déduire l'expression algébrique de f *et* g.

Proposition 3. *Soit* $f : x \mapsto ax + b$ *une fonction affine, et* $x_1 < x_2$ *deux réels distincts. Alors,*

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad b = f(x_1) - ax_1$$

Proposition 4. *Soit* $f : x \mapsto ax + b$ *une fonction affine.*

— *Si* $a < 0$, *alors* f *est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

— *Si* $a > 0$, *alors* f *est croissante sur* $\mathbb{R}$.

Méthode 1. *Pour dresser le tableau de signes d'une fonction affine* $f : x \mapsto ax + b$, *il faut :*

1. *Déterminer l'antécédant de* 0 *de* f, *autrement dit, trouver* x *tel que* $ax + b = 0$;
2. *Le tableau de signes s'obtient en suivant la variation de la fonction, autrement dit, cela dépend du signe de* a

Exercice 2. *Dresser le tableau de signes des fonctions trouvées dans l'exercice 1.*

2 Fonction polynomiale du second degré

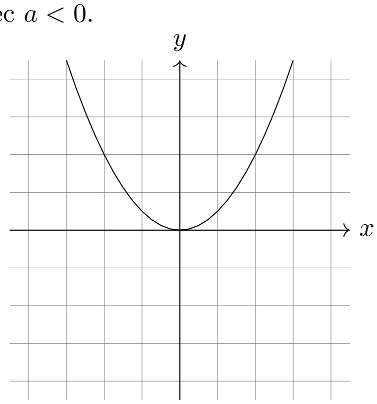
Définition 2. *Une **fonction polynomiale du second degré** est une fonction f définie sur les réels qui à tout nombre x associe un réel $f(x)$ de la forme :*

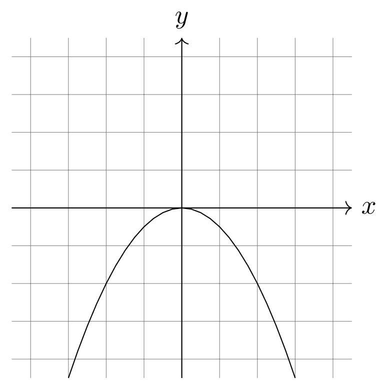
$$ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarque. *L'hypothèse $a \neq 0$ est essentielle, sinon la fonction est polynomiale de degré au plus* 1.

On trace la courbe représentative de deux fonctions polynomiales du second degré : une avec $a > 0$ et une avec $a < 0$.





Définition 3. *Soit f une fonction polynomiale de degré 2. Sa courbe représentative est appelée une **parabole**.*

Proposition 5. *Soit f une fonction polynomiale de degré 2. telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors :*

— *Si $a > 0$, il existe une valeur de x, notée x_m telle que f est décroissante sur $]-\infty; x_m]$ et croissante sur $[x_m; +\infty[$*

— *Si $a < 0$, il existe une valeur de x, notée x_M telle que f est croissante sur $]-\infty; x_M]$ et décroissante sur $[x_M; +\infty[$*

Remarque.

— *Dans le cas $a > 0$, les* « branches de la paraboles sont tournées vers le haut »*. Dans le cas contraire ($a < 0$), elles sont* « tournées vers le bas ».

— *Dans le cas $a > 0$, f admet un unique minimum, et ce minimum est atteint en x_m. Dans le cas contraire ($a < 0$), f admet un maximum, et ce maximum est atteint en x_M.*

3 Recherche de l'extremum

3.1 Forme canonique

Proposition 6. *Soit f une fonction polynomiale du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe α et β tel que*

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Remarque. *Dans ce cas,* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *et* $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. *Soit l'expression polynomiale du second degré* $-x^2 + 2x - 5$. *Déterminer sa forme canonique.*

Méthode 2 (Par identification)**.**

Méthode 3 (En utilisant une identité remarquable « limitée »)**.**

3.2 Extremum

Proposition 7. *Soit une fonction polynomiale du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On suppose que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ pour tout x réel. Alors, f admet un extremum qu'il atteint en α et ayant pour valeur β.*

Remarque. *Comme dit précédemment, si $a > 0$, alors f admet un minimum qu'il attent en $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. Sinon, si $a < 0$, alors f admet un maximum qu'il atteint en $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. Dans les deux cas, cet extremum vaut $\beta = f(\alpha)$.*

Exemple. *Soit la fonction polynomiale $g : x \mapsto 4x^2 + 32x - 5$.*

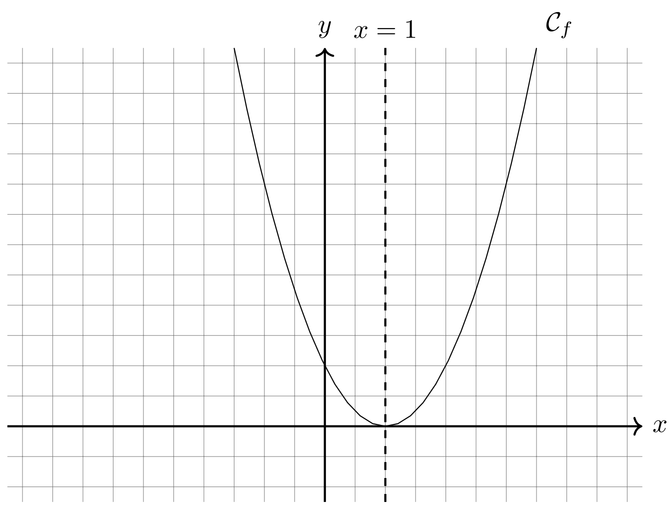
a) *Cette fonction admet-elle un minimum ou un maximum ?*

b) *En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?*

c) *Que vaut cet extremum ?*

Proposition 8. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. On suppose que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une parabole admettant comme axe de symétrie la droite $x = \alpha$.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Alors f admet un minimum (car $a > 0$) atteint en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1$. Alors $\mathcal{C}_f$ admet la droite $x = 1$ comme axe de symétrie.*



Dérivation Locale

Première Spécialité Mathématiques

1 Taux de variation

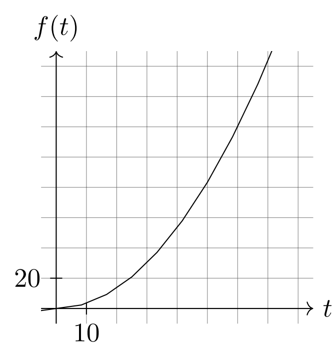
Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On prend $a < b \in I$. On appelle* ***taux de variation de f entre a et b*** *la grandeur*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple. *Une voiture bleue roule pendant une heure. Soit $f(t)$ la distance parcourue en* km *en fonction du temps t en* min.

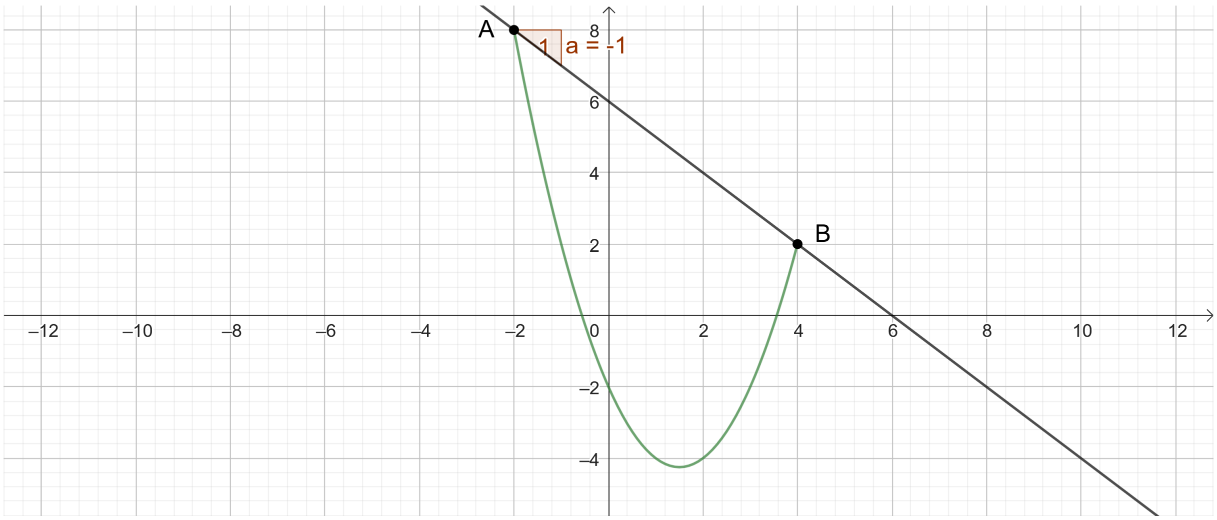
a) Quel est l'intervalle de définition de f ?

b) Calculer le taux de variation de f entre 0 et 60. Comment interpréter votre résultat ?



c) On a représenté la courbe de la fonction f sur le repère ci-dessus. Tracer la courbe représentant le trajet d'une voiture rouge, roulant à la vitesse constante de $120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Proposition 1. *Soit f un fonction définie sur un intervalle I, et $a < b \in I$. Si on se place sur un repère orthonormé, et que l'on considère les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$, alors le taux de variation de f entre a et b correspond à la pente de la droite entre A et B.*



Remarque. *Le taux de variation d'une fonction entre a et b répond à la question suivante :* ***Pour chaque abscisse parcourus entre a et b, de combien d'ordonnées sommes-nous montés ou descendus ?***

Proposition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $J \subseteq I$ un intervalle.*

— *Si f est croissante sur J, alors pour tout $a < b \in J$, le taux de variation de f entre a et b est positif.*

— *Si f est décroissante sur J, alors pour tout $a < b \in J$, le taux de variation de f entre a et b est négatif.*

Remarque. ***Les réciproques sont fausses :*** *un taux de variation de f entre a et b positif n'implique pas que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto (x-1)^2 - 2$ définie sur $[-2; 3]$.*

a) Donner un intervalle I sur lequel f est croissante, et un intervalle J sur lequel f est décroissante.

b) Choisir deux valeurs dans chacun des intervalles, et calculer les taux de variations de f entre ces deux valeurs.

c) Calculer le taux de variation entre -2 et 2. Que peut-on en déduire ?

2 Dérivée locale

2.1 Limite finie en 0

Soit $Q(h)$ une quantité dépendant d'une variable h.

Définition 2. *On dit que $Q(h)$* ***admet une limite finie en*** *0 quand il existe un nombre q tel que $Q(h)$ s'approche de plus en plus de q à mesure que h s'approche de plus en plus de 0. Dans ce cas, ce nombre q est appelé* ***limite de*** *$Q(h)$* ***en*** *0, et est noté*

$$\lim_{h \to 0} Q(h)$$

Exemple. *Pour chaque quantité $Q(h)$ suivante, remplir le tableau de valeur suivant, et en déduire si $Q(h)$ admet une limite finie en 0, et le cas échéant, donner $\lim_{h\to 0} Q(h)$.*

a) $Q(h) = 1 + h$

b) $Q(h) = \dfrac{1}{h}$

h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$Q(h)$					

h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$Q(h)$					

Remarque. *Il est donc tout à fait possible pour $Q(h)$ de ne pas admettre de limite finie en 0. Toute notion dépendant donc d'une limite finie doit être manipulée avec précaution.*

2.2 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On fixe $a \in I$. Soit $h \neq 0$ un nombre tel que $a + h \in I$. Alors le taux de variation de f entre a et $a + h$ est donné par

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque. *Par définition, on ne peut pas remplacer h par 0, donc $T_a(0)$ n'est pas défini. Par contre, on peut s'interesser à son éventuelle limite finie en 0*

Définition 3. *On dit que f* ***est dérivable en*** *a quand $T_a(h)$ admet une limite finie en 0. Dans ce cas, on appelle* ***nombre dérivé de*** *f* ***en*** *a la limite en 0 de $T_a(h)$, et on le note $f'(a)$. En résumé, quand f est dérivable en a, alors son nombre dérivé est donné par*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

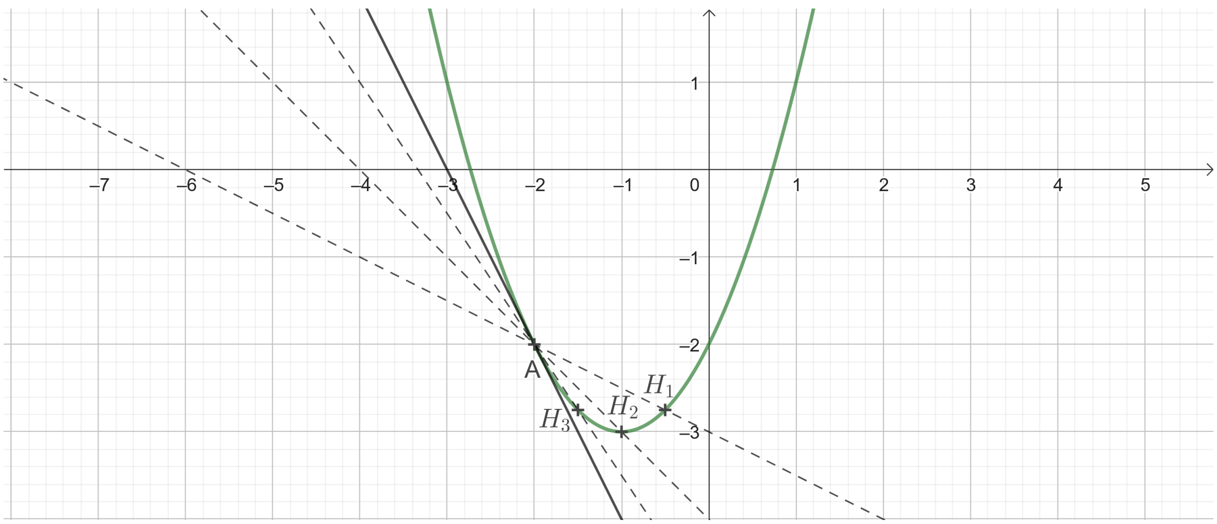
3 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I. On fixe $a \in I$. On s'intéresse aux droites sécantes à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f passant par les points $A(a; f(a))$ et $H(a+h; f(a+h))$, pour h suffisamment petit pour que $a+h \in I$.

Remarque. *La pente de cette droite sécante est donnée par le taux de variation*

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Au fur et à mesure que H se rapproche de A, cette sécante se rapproche d'une certaine droite, dont la pente est donnée par $f'(a)$.



> **Définition 4.** *On dit que f admet une* ***tangente en*** *a quand elle dérivable en a. Dans ce cas, la* ***tangente en*** *a* ***de*** *f est la droite passant par le point $A(a; f(a))$ et de pente $f'(a)$.*

Remarque. *La tangente de f en a, quand elle existe, peut être comprise comme une droite qui « frôle »la courbe en a. Sa pente peut-être interprétée comme la* ***Vitesse instantanée*** *de la fonction en a.*

> **Proposition 3.** *L'équation de la tangente de f en a, quand elle existe, est*
>
> $$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 4$ définie sur $\mathbb{R}$.*

a) La fonction f est-elle dérivable en 3 ? En déduire son nombre dérivé en 3.

b) En déduire l'équation de la tangente de f en 3.

Chapitre 3 : Équations et inéquations du second degré

Première Spécialité Mathématiques

1 Racines

1.1 Définition

Définition 1. *Soit f une fonction. On appelle **racine** de la fonction f un nombre r tel que $f(r) = 0$.*

Exercice. *Vérifier que $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ sont deux racines de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$.*

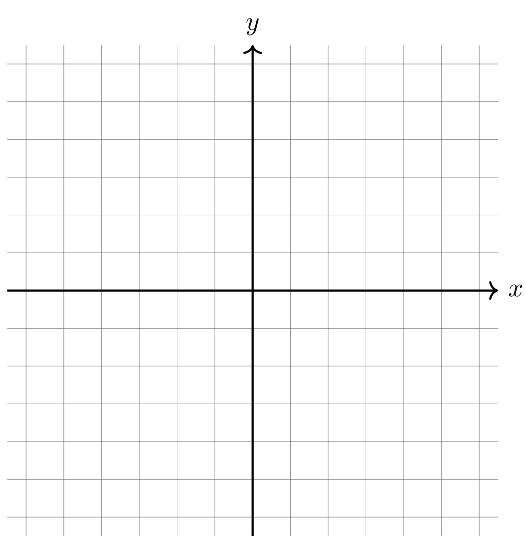
Proposition 1. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors, seuls trois cas sont à considérer :*

a) f n'admet aucune racine réelle, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a $f(x) \neq 0$.

b) f admet une unique racine notée r. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r)^2$ pour tout x.

c) f admet deux racines, notées r_1 et r_2. Dans ce cas, f peut être factorisée en $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ pour tout x.

Exercice. *Sur le repère suivant, tracer la courbe représentative de trois fonctions polynomiale du second degré correspondant à chacun des cas exposés dans la proposition précédente.*



1.2 Calcul des racines

1.2.1 En identifiant une racine évidente

Exercice. *Soit* $f(x) = -x^2+6x$ *pour* $x \in \mathbb{R}$. *Cette fonction possède-t-elle des racines évidentes ? Essayer avec des entiers comme* $0; 1; -1; \dots$.

1.2.2 En utilisant une identité remarquable

Exercice. *Soit* $f(x) = 2x^2 - 128$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

a) Factoriser $f(x)$ *par* 2.

b) À l'aide d'une identité remarquable bien choisie, factoriser $f(x)$.

c) En déduire les racines de $f(x)$.

1.2.3 Avec le produit et la somme des racines

Proposition 2. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. Si* r_1 *et* r_2 *sont les deux racines (possiblement confondues) de* f, *alors*

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \qquad r_1 \times r_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple. *Soit* $f(x) = x^2 + x - 20$. *On remarque que* 4 *est une racine de* f. *En déduire une autre racine de* f, *puis une factorisation de* f.

1.3 Discriminant

Définition 2. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale du second degré. Alors on appelle* ***discriminant de f****, noté* Δ*, la quantité*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

theorem 1. *Soit* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *une fonction polynomiale de second degré, et* Δ *son discriminant. Alors :*

a) Si $\Delta < 0$*, alors* f *n'admet pas de racine réelle.*

b) Si $\Delta = 0$*, alors* f *admet une unique racine réelle* r*, telle que*

$$r = -\frac{b}{2a}$$

c) Si $\Delta > 0$*, alors* f *admet deux racines réelles distinctes* $r_1 < r_2$*, telles que*

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration

2 Signe

Proposition 3. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré. Alors :*

a) Si f n'admet pas de racine, alors f est du même signe que a sur $\mathbb{R}$.

b) Si f admet une unique racine r, alors f est du même signe que a sur $\mathbb{R}$, et vaut 0 en r.

c) Si f admet deux racines distinctes $r_1 < r_2$, alors f est du même signe que a sur $]-\infty; r_1[$ et sur $]r_2; +\infty[$, et est du signe opposé à a sur $]r_1; r_2[$

Remarque. *Une phrase pour retenir cette proposition :*

*Une fonction polynomiale du second degré est du même signe que a à **l'extérieur** de ses racines, et est de signe opposé à a à **l'intérieur** de ses racines.*

Exercice. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 5x + 3$. Compléter le tableau de signes de f.*

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de f	

Dérivation globale

Premières Spécialité Mathématiques

1 Fonction dérivée

Remarque. *On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I est dite* ***dérivable en*** $a \in I$ *si et seulement si le taux de variation*

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. La valeur de cette limite $\lim_{h\to 0} T_a(h)$ est alors appelé ***nombre dérivé de f en*** *a et est noté $f'(a)$.*

En résumé, la notion de dérivation est un processus dépendant de f qui à tout nombre a associe, quand c'est possible, un autre nombre $f'(a)$. Il s'agit donc d'une ***fonction****.*

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est* ***dérivable sur*** *I si pour tout nombre $a \in I$, la fonction f est dérivable en a. Dans ce cas, on pose f' la fonction définie sur I qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.*

Exemple. *Soit* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

En justifiant son existence, calculer le nombre dérivé de f en a, avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque. En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$

Proposition 1.

1. *Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ $f : x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 0$.*
2. *La fonction identité définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1$.*
3. *La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.*
4. *La fonction puissance $n \in \mathbb{N}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^n$ est déribale sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto nx^{n-1}$*
5. *La fonction inverse définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.*
6. *La fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Remarque.

— *Avant de dériver une fonction, il faut s'assurer qu'elle est bien dérivable.*

— *La fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$* ***(ouvert en 0)****, tandis qu'elle sur définie sur $[0;+\infty[$* ***(fermé en 0)****. En effet, la fonction n'est pas dérivable en 0.*

Démonstration. On démontre que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. □

2 Opération algébriques

Proposition 2. *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I **ouvert**.*

- *La fonction somme de u et v définie sur I par $s(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $s'(x) = u'(x) + v'(x)$. ($(u+v)' = u' + v'$)*
- *Le produit p d'une fonction u définie sur I par une constante $k \in \mathbb{R}$, définie par $p(x) = k \times u(x)$, est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = ku'(x)$.*
- *La fonction produit de u et v définie sur I par $p(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $p'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. ($(uv)' = u'v + uv'$)*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction inverse de v définie sur I par $i(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $i'(x) = -\dfrac{v'}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}\right)$*
- *Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction quotient de u et de v définie sur I par $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie, pour tout $x \in I$, $q'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. $\left(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$*

Remarque. *On résume cette proposition sous la forme d'un tableau :*

Forme de f	*Dérivée f'*	*Remarques*
$u+v$	$u'+v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
uv	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	*v ne s'annule pas*
$\dfrac{u}{v}$	$-\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	*v ne s'annule pas*

Exemple. *Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 5x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ v(x) = \sqrt{x} + 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

a) Les fonctions u et v sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$? Donner l'expression de leur dérivée.

b) En déduire la dérivée de la somme, du produit et du quotient de u et v.

3 Composition de fonctions

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On pose aussi a et b deux nombres réels. Enfin, on pose J l'intervalle des réels x tels que $ax + b \in I$.*
Alors on appelle la fonction g définie pour tout $x \in J$ par

$$g(x) = f(ax + b)$$

*la **fonction composée** de f par la fonction $x \mapsto ax + b$.*

Proposition 3. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels et J l'intervalle des x vérifiant $ax+b \in I$. Alors la fonction composée de f par $x \mapsto ax+b$, c'est-à-dire la fonction définie pour tout $x \in J$ par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur J, et sa dérivée vaut pour tout $x \in J$,*

$$g'(x) = af'(ax + b)$$

Exemple. *Soit la fonction g définie sur un certain intervalle J par la formule*

$$g(x) = \sqrt{3x - 2} \text{ pour tout } x \in J$$

*a) Identifier le plus grand intervalle **ouvert** J sur lequel cette fonction est définie.*

b) De quelles fonctions g est-elle la composée ?

c) En déduire que g est dérivable sur J, et calculer sa dérivée.

4 Variations de fonctions dérivables

Proposition 4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

- *La fonction f est* ***croissante*** *sur I si et seulement si f' est* ***positive*** *sur I.*
- *La fonction f est* ***décroissante*** *sur I si et seulement si f' est* ***négative*** *sur I.*
- *La fonction f est* ***constante*** *sur I si et seulement si f' est* ***nulle*** *sur I*

Remarque.
- *Cela correspond à l'intuition grâce à laquelle la dérivée a été construite, c'est-à-dire que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en le point $(x; f(x))$.*
- *Ce sont des équivalences. Si la fonction est croissante, alors sa dérivée est positive. Si la dérivée d'une fonction est positive, alors cette fonction est croissante.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.*

a) Donner l'expression de la dérivée de f.

b) Étudier le signe de f' à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Signe de f'	

c) En déduire le tableau de variations de f.

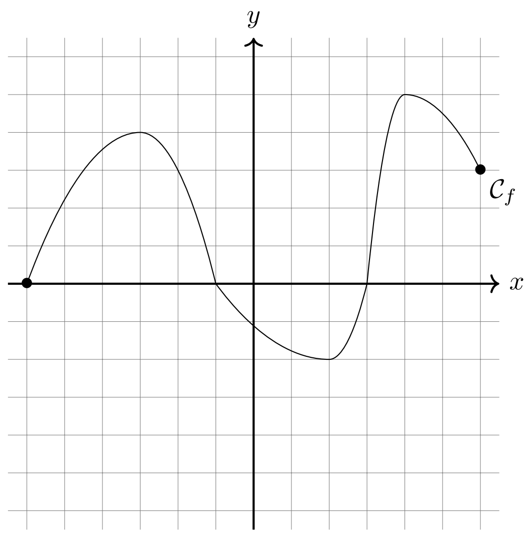
x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Variations de f	

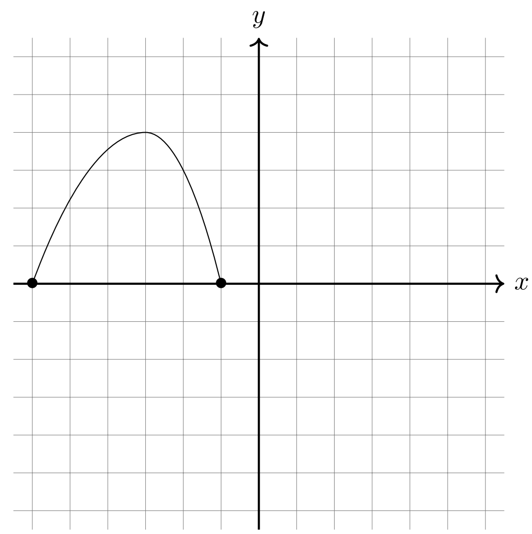
5 Extremums de fonctions dérivables

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. On dit que f atteint un* ***extremum local*** *en a s'il existe un intervalle (non restreint à un point) J tel que : $a \in J$; $J \subseteq I$ et la restriction de f sur J atteint un extremum en a.*

Remarque. *Autrement dit, $f(a)$ est un extremum local de f sur I si l'image de a est supérieure ou inférieure à l'image de ses voisins « proches ».*

Exercice. *Soit f une fonction définie sur $[-6;6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est représentée sur le repère suivant (à gauche) :*





a) Quel est le maximum et le minimum de f ? En quelles valeurs sont-elles atteintes ?

b) On a représenté sur le repère à droite la restriction de f sur l'intervalle $[-6;-1]$. En déduire en quel abscisse f admet un extremum local.

Proposition 5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle* ***ouvert*** *I, et soit $a \in I$. Si f atteint un extremum local en a, alors*

$$f'(a) = 0$$

Remarque.

— ***L'hypothèse d'intervalle ouvert est importante*** *: cette proposition devient fausse sinon. Par exemple, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ restreinte sur $[1;2]$ admet un extremum en 1, mais sa dérivée en 1 est non-nulle.*

— ***La réciproque de cette proposition est fausse*** *: ce n'est pas forcément parce que $f'(a) = 0$ que f atteint un extremum local en a. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, on a bien $f'(0) = 0$, et pourtant $f(0) = 0$ n'est ni un minimum ou un maximum local.*

— *Cette proposition donne néanmoins une liste des candidats envisageables pour lex extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle I : il suffit de chercher parmi les points a tels que $f'(a) = 0$. C'est ce qu'on appelle une* ***condition nécessaire****.*

Suites Numériques

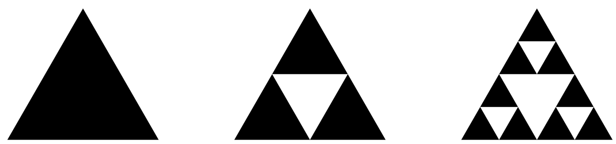
Première Spécialité Mathématiques

1 Définition d'une suite

Définition 1. *Une **suite numérique réelle** est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note l'image $u(n)$ sous le format u_n, qui se lit « u indice n ». Cette image est appellée **terme de rang** n **de** u.*

Exemple. *De nombreux phénomènes ne présentent pas de continuité, et peuvent être modélisés par des suites.*

- *Le chiffre d'affaire d'une entreprise n mois après sa création.*
- *Le nombre de façons de ranger n figurines sur une étagère.*
- *L'aire de la figure suivante après la n-ième étape.*



Étape 0 *Étape* 1 *Étape* 2

Remarque. *Une suite peut-être présentée sous la forme d'une séquence de nombres. Dans ce cas, le premier nombre de cette liste correspond au terme d'indice* 0*.*

Pour parler d'une suite u en toute généralité, on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. *Ainsi, on ne confondra pas les notations $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (la suite en toute généralite) et u_n (le n^e terme de la suite).*

Définition 2. *Si l'on connait $f(n)$ une expression dépendant de n telle que pour tout n, $u_n = f(n)$, alors on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de façon **explicite**.*

Exemple. *Pour chacune des définitions explicites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous, donner les 4 premiers termes $u_0; u_1; u_2$ et u_3.*

- $u_n = 3n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*
- $u_n = 5 \times 2^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*
- $u_n =$ *« Le nombre de lettres dans l'écriture en français de n », pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

Définition 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que u_n est définie **par récurrence** si u_0 est connue, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_{n+1} est obtenu en fonction de u_n.*

Exemple. *Pour chacune des définition par récurrence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer les* 4 *premiers termes $v_0; v_1; v_2$ et v_3.*

- $v_0 = 6$ *et* $v_{n+1} = v_n + 4$ *:*
- $v_0 = 2$ *et* $v_{n+1} = 5 \times v_n$ *:*

2 Sens de variation d'une suite

Définition 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_{n+1}$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < u_{n+1}$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} < u_n$.*

Proposition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.*

Proposition 2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.*

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.*

Exemple. *Étudier les variations des suites suivantes :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = 8 + 4n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_0 = 64$ *et* $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

c) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $w_n = \dfrac{n}{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

d) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_n = (-1)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3 Suites arithmétiques

Définition 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite est* ***arithmétique*** *si et seulement il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de ***premier terme*** *u_0 et de* ***raison*** *r.*

Remarque. *Le calcul des termes d'une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ peut être schématisé comme suit :*

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \cdots$$

Exemple. *Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 pour chaque définition suivante :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 0 *et de raison* 1 *:*

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 1 *et de raison* 2 *:*

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite arithmétique de premier terme* 10 *et de raison* $-\dfrac{1}{2}$ *:*

Proposition 3 (Variation d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.*

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $r \geq 0$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $r \leq 0$.*

Remarque. *Dans le cas particulier où $r = 0$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***constante****.*

Proposition 4 (Formule explicite d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe*

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Remarque. *On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :*

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "+r", no head] \arrow[rrrr, bend right, "+4\times r"'] & u_1 \arrow[r, "+r", no head] & u_2 \arrow[r, "+r", no head] & u_3 \arrow[r, "+r", no head] & u_4 \arrow[r, "+r"] & \cdots \end{tikzcd}$$

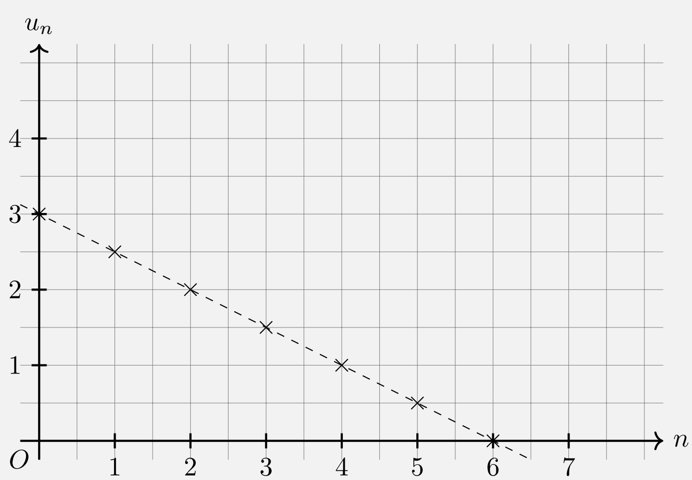
Exemple. *Pour chacune des définitions suivantes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer u_{10} :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 6 et de raison 5 :

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison -2 :

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$:

Proposition 5. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors les points de sa représentation graphique sont alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$:*



On dit que les suites arithmétiques permettent de modéliser des ***évolutions linéaires****.*

4 Suites géométriques

Définition 6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite est* ***géométrique*** *si et seulement il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que*

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de ***premier terme*** *u_0 et de* ***raison*** *q.*

Remarque. *Le calcul des termes d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ peut être schématisé comme suit :*

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \cdots$$

Exemple. *Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 pour chaque définition suivante :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 :

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 64 et de raison $\dfrac{1}{2}$:

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1000 et de raison $-0,1$:

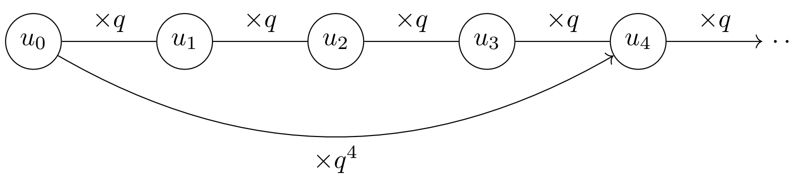
Proposition 6 (Variation d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.* ***On suppose que son premier terme u_0 est non nul.***

- *Si $q > 1$:*
  - *Si $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
- *Si $0 < q < 1$:*
  - *Si $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
- *Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du terme u_1.*
- *Si $q < 0$, alors la suite n'est pas* ***monotone*** *(elle n'est ni croissante, ni décroissante).*

Proposition 7 (Formule explicite d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque. *On peut résumer cette formule à l'aide du schéma suivant :*

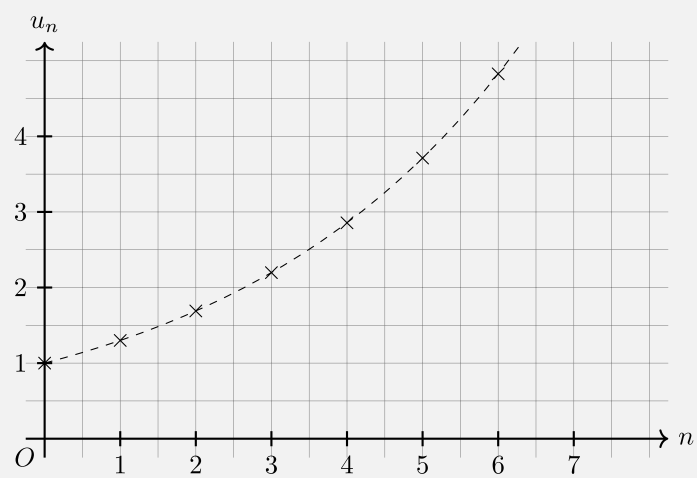


Exemple. *Pour chacune des définitions suivantes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer u_{10} :*

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite géométrique de premier terme* 1 *et de raison* -2 *:*

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite géométrique de premier terme* $5^{10} = 9\,765\,625$ *et de raison* $\dfrac{1}{5}$ *:*

Définition 7. *Les suites géométriques permettent de modéliser des évolutions dites **exponentielles**.*



5 Notion de limite

5.1 Convergence de suites

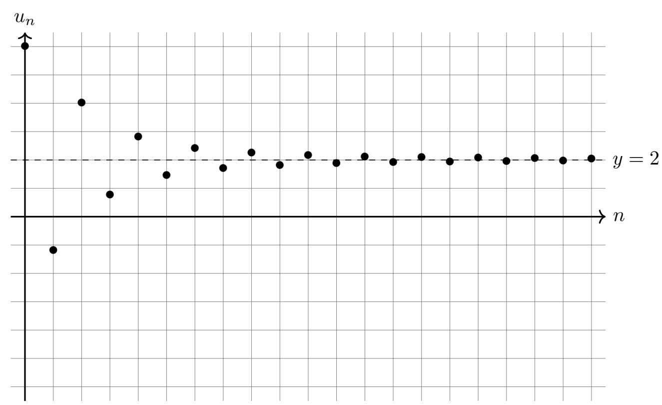
Définition 8 (Limite finie d'une suite)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique, et* l *un nombre réel. On dit que* ***la suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***admet*** l ***comme limite*** *quand les nombres* u_n *sont aussi proches de* l *que l'on veut à mesure que les indices* n *sont grands. On le note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

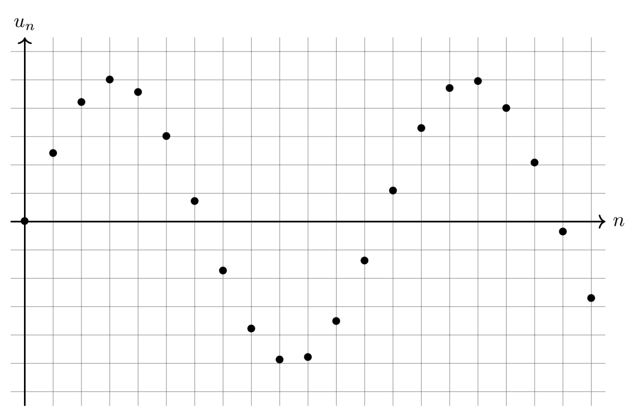
Remarque.

- *Quand une suite admet une limite finie, on dit que la suite* ***converge****.*
- *Quand une suite ne converge pas, on dit qu'elle* ***diverge****.*

Exemple. *On représente une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par les points de coordonnées* (n, u_n)*.*



La suite (u_n) *semble converger vers le réel* 2 *: plus* n *est grand (pour des abscisses de plus en plus grandes), et plus* u_n *est proche de* 2 *(les ordonnées des points sont de plus en plus proche de* 2*).*



Ici, la suite représentée ne semble pas admettre de limite finie l*. En effet, les ordonnées des points de coordonnées* (n, u_n) *ne semblent pas se rapprocher d'une valeur en particulier, à la mesure que* n *augmente.*

5.2 Divergence vers l'infini

Définition 9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que **la suite** (u_n) **admet** $+\infty$ **comme limite** quand les valeurs de u_n sont aussi grandes que l'on veut à la mesure où n augmente. On le note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

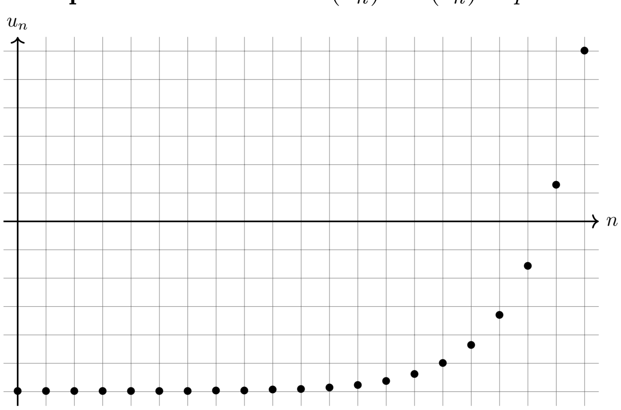
Définition 10. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que **la suite** (u_n) **admet** $-\infty$ **comme limite** quand les valeurs de u_n sont aussi petites que l'on veut à la mesure où n augmente. On le note*

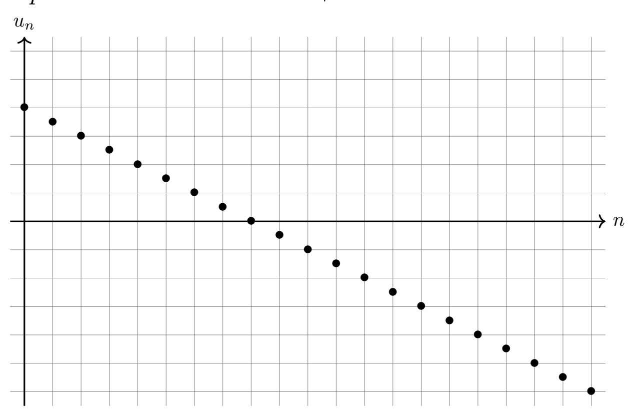
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarque. *Une suite admettant $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite est dite **divergente**. Une suite diverge donc dans deux cas :*

- *si elle n'admet pas de limite finie ;*
- *ou si elle admet $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite.*

Exemple. *Les deux suites (u_n) et (v_n) représentées ci-après admettent $-\infty$ et $+\infty$ comme limite.*





6 Calcul de sommes

6.1 Sommes arithmétiques

Proposition 8. *Soit n un nombre entier naturel. Alors,*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. **Voir cahier.** □

Proposition 9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r, et N un entier naturel. Alors,*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = (N+1)u_0 + \frac{N(N+1)r}{2}$$

Démonstration. **Voir Cahier** □

Exemple. *Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$ (somme des 16 premiers termes).*

6.2 Sommes géométriques

Proposition 10. *Soit n un nombre entier naturel, et $q \neq 1$ un réel. Alors,*

$$1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Démonstration. **Voir cahier.** □

Proposition 11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et N un entier naturel. Alors,*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = u_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Démonstration. **Voir cahier.** □

Exemple. *Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{19}$ (somme des 20 premiers termes).*

Probabilités conditionnelles et indépendance d'événements

Première Spécialité Mathématiques

1 Rappel : Vocabulaire des probabilités

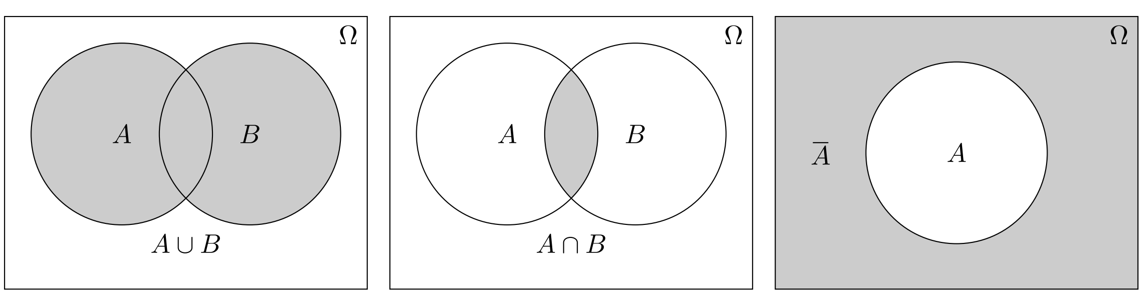
Un joueur ou une joueuse lance deux dés à six faces équilibrés, et observe la somme des valeurs obtenues.

Définition 1.

- *Une telle situation où le résultats possibles sont connus, mais où l'issue n'est a priori pas décidée à l'avance est nommée* ***Expérience aléatoire****.*
- *L'ensemble des* ***issues*** *possible de cette expérience est nommé l'****univers****, habituellement noté* Ω*. (Ici, un univers envisageable pour cette expérience est* $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$*)*
- *Un sous-ensemble de l'univers* Ω *est appelé* ***événement****. (Par exemple, l'événement correspondant à obtenir une somme paire serait* $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$*)*

Définition 2. *Soient* A *et* B *deux événements d'une expérience aléatoire d'univers* Ω*.*

- *Si* $A = \Omega$*,* A *est appelé* ***événement certain****. (Par exemple, obtenir une somme inférieure à 13 à l'aide de deux dés est un événement certain)*
- *Si* $A = \emptyset$ *(l'ensemble vide), alors* A *est appelé* ***événement impossible****. (Par exemple, obtenir 1 à l'aide de deux dés est un événement impossible)*
- *L'****union*** *des événements* A *et* B*, noté* $A \cup B$*, se lisant « A* ***union*** *B », est l'événement réalisant les issues de* A ***ou*** *celles de* B*. (Par exemple, si* $A = \{4; 10\}$ *et* $B = \{10; 12\}$*, alors leur union est donnée* $A \cup B = \{4; 10; 12\}$*)*
- *L'****intersection*** *des événements* A *et* B *noté* $A \cap B$*, se lisant « A* ***inter*** *B, est l'évenement réalisant à la fois les issues de* A ***et*** *celles de* B*. (Par exemple, si* $A = \{4; 10\}$ *et* $B = \{10; 12\}$*, alors leur intersection est donnée par* $A \cap B = \{10\}$*)*
- *Le complémentaire de l'événement* A *noté* $\overline{A}$*, se lisant « A* ***barre*** *», est l'événement réalisant toutes les issues qui ne sont pas réalisées par* A*. (Par exemple, le complémentaire de l'évenement correspondant à obtenir une somme paire serait l'événement correspondant à obtenir une somme impaire)*



Exemple. *Proposer deux événements* A *et* B *dont l'intersection et l'union sont non-vide.*

Définition 3. *Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω. Alors A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.*

Définition 4. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Une **probabilité** sur Ω associe à tout événement A un nombre réel $P(A)$ compris entre 0 et 1, et vérifie deux propriétés :*

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *si les événements A et B sont disjoints.*

Exemple. *Si A est l'événement consistant à obtenir 7 aux dés, alors*

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Définition 5. ***Établir la loi de probabilité** d'une expérience aléatoire d'univers Ω consiste à associer à chaque issue $w \in \Omega$ sa probabilité $P(\{w\})$.*

Remarque. ***Ainsi, si la loi de probabilité est connue, la probabilité d'un événement** $P(A)$ **est donnée par la somme de toutes les probabilités des issues réalisant** A.*

Exemple. *On donne la loi de probabilité concernant la somme de deux dés.*

$w \in \Omega$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\{w\})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

a) Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

b) En déduire la probabilité de l'événement B « La somme des dé est paire ».

Définition 6. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et P une probabilité sur Ω. On est en **situation d'équiprobabilité** si la loi de probabilité de P associe la même valeur à toutes les issues.*

Exemple.

- *Regarder le résultat du lancer d'un unique dé équilibré est une expérience aléatoire en situation d'équiprobabilité.*
- *Regarder la somme du résultat de deux dé équilibrés n'est pas une expérience aléatoire en situation d'équiprobabilité.*

Proposition 1. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω non vide, **en situation d'équiprobabilité**, et soit A un événement d'Ω. Alors la probabilité de A est donnée par*

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

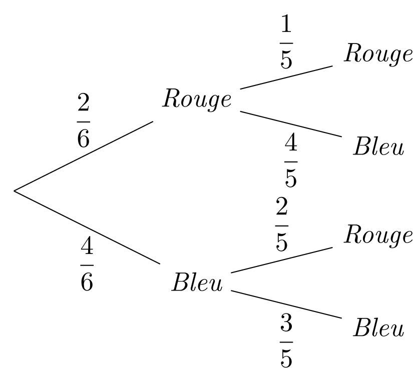
2 Représentation d'expérience aléatoire

2.1 Arbres pondérés

Un **arbre pondéré de probabilités** permet de représenter des événements **successifs** d'une expérience aléatoire.

Exemple. *Dans une urne, il y a quatre boules bleues et deux boules rouges. On tire successivement deux boules* ***sans remise*** *(on ne remet pas la première boule dans l'urne). On s'interroge sur la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage.*

Pour cela, on représente l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré de probabilité :



Proposition 2.

- *Une branche de la racine à une extrémité correspond à l'intersection des événements associés. Pour calculer la probabilité de cette intersection, il faut multiplier les probabilités sur la branche.*
- *La somme de toutes les probabilités issues d'un même noeud vaut* 1*.*
- *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de toutes les branches contenant cet événement.*

Exercice 1. *En reprenant l'expérience décrite précédemment et l'arbre pondéré associé, répondre aux questions suivantes :*

a) Soit A : « Les deux boules tirées sont rouges ». Calculer $P(A)$.

b) Soit B : « Les deux boules tirées sont de couleur différentes ». Calculer $P(B)$

Remarque.

- *Chaque noeud de l'arbre représente un événement. La racine est un noeud correspondant à l'événement $\varnothing$.*
- *Les branches issues d'un noeud correspondent aux événements possibles de survenir une fois que l'événement du noeud est réalisé. Par exemple, une fois que l'on a tiré une boule rouge, il est* ***possible*** *de tirer une seconde boule rouge ou une boule bleue.*
- *Un arbre a une certaine « hauteur », correspondant aux nombre d'étapes successives dans l'expérience. Par exemple, l'arbre est de hauteur* 2 *parce qu'il y a deux tirages successifs dans l'urne.*

2.2 Tableau

Certaines expériences aléatoires se prêtent bien à l'utilisation de tableaux à double entrée. C'est le cas des expériences où l'on regarde deux événements **simultanés**.

Exemple. *La somme du résultat du lancer de deux dés (un dé bleu et un dé rouge) est un bon exemple, car il peut être résumé comme ceci :*

Rouge \ *Bleu*	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Puisque toutes les cases correspondent à des situations équiprobables, il devient très facile de calculer la probabilité d'obtenir la somme de votre choix.

Exercice 2.

a) Calculer la probabilité que la somme obtenue soit 5.

b) Calculer la probabilité que la somme obtenue soit paire.

Exemple. *Dans un lycée, on interroge les filles et les garçons sur leur préférence d'activité extrascolaire.*

Activité \ *Genre*	*Fille*	*Garçon*
Artistique	450	370
Sportive	850	230

Exercice 3. *On interroge un élève de ce lycée au hasard.*

a) Quelle est la probabilité que l'élève interrogé soit un garçon qui préfère une activité artistique ?

b) Quelle est la probabilité que l'élève interrogé soit une fille ?

c) On interroge une fille. Quelle est la probabilité que l'élève interrogée préfère une activité sportive ?

Remarque.

- *Une case correspond donc à l'intersection de deux événements.*
- *Le nombre total d'issues dans chaque événement dépend du contexte. Dans le cas des dés, le nombre de cases du tableau donne le nombre total d'issues. Dans l'exemple du lycée, le nombre total d'issues est donné par le nombre total d'élève, et est obtenu en faisant la somme du nombre d'effectifs de chaque case.*

3 Théorie des probabilités

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition 7. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et A et B deux événenements de Ω. On suppose de plus que $P(A) \neq 0$.*
*Alors, la **probabilité de** A **sachant** B, notée $P_A(B)$, est la probabilité que B se réalise **sachant** que A s'est déjà réalisé.*

Exemple. *Une usine produit des vis et des clous. Certaines pièces ont une défaut de fabrication. On prend une pièce produite par cette usine au hasard.*

On note V « La pièce choisie est une vis »et D « La pièce choisie a un défaut de fabrication ». Dans chacune des situations suivantes, donner la probabilité correspondante (en choisissant bien la bonne notation)

a) *Il y a 4% de vis présentant un défaut de fabrication parmi toutes les pièces produites par l'usine.*

b) *Il y a 2% de vis présentant un défaut de fabrication parmi les vis produites par l'usine.*

Proposition 3 (Formule des probabilités composées)**.** *Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$. Alors*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Remarque. *Il s'agit de la règle de calcul de la probabilité d'une seule branche dans un arbre pondéré.*

Proposition 4. *Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$. Alors*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple. *On tire une bille au hasard dans un sac. Chaque bille est grosse ou petite, et chaque bille est rouge ou verte. On note R « La bille est rouge », et G « la bille est grosse ». Alors le tableau suivant donne la répartition du sac.*

Couleur / *Taille*	R	$\overline{R}$	*Total*
G	12	8	20
$\overline{G}$	7	13	20
Total	19	21	40

a) *Quelle est la probabilité d'obtenir une grosse bille rouge ?*

b) *Quelle est la probabilité d'obtenir une petite bille, sachant que la bille tirée est verte ?*

3.2 Partition de l'univers

Définition 8. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. On dit que des événements A_1, A_2, ...A_n forment une* ***partition de*** Ω *si et seulement si*

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_1,\ A_2\ ...A_n \text{ sont disjoints deux à deux} \end{cases}$$

Remarque.

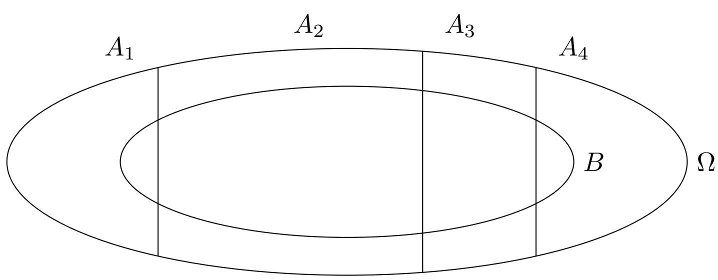
- *Créer une partition de Ω, c'est regrouper chaque issue de Ω dans un unique paquet.*
- *Soit A un événement de Ω, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.*

Exemple. *On considère le lancer d'un seul dé équilibré. Alors si A « le résultat est pair », B « le résultat est 1 »et C « le résultat est impair supérieur ou égal à 3 », on en déduit que A, B et C forment une partition de l'univers de l'expérience.*

Proposition 5 (formule des probabilités totales)**.** *Soit B un évenement, et A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω. Alors,*

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Remarque. *Le schéma suivant permet de visualiser la situation.*



Remarque. *La formule des probabilité totale correspond à la méthode de calcul de la probabilité de plusieurs branches d'un arbre pondéré.*

À chaque hauteur de l'arbre, il faut donc s'assurer que tous les événements originaires d'une même branche forment une partition de l'univers Ω.

4 Indépendance

4.1 Indépendance d'événements

Définition 9. *Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et P une probabilité sur Ω.*
Soit A et B deux événements de Ω. Alors, A et B sont dits ***indépendants*** *si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Exemple. *On lance deux dés : un dé rouge et un dé bleu. On pose les événements A « le dé rouge renvoie un résultat pair », et B « le dé bleu renvoie un résulat supérieur ou égal à 4 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?*

Proposition 6. *Soit A et B deux événements, tels $P(A) \neq 0$. Alors, si A et B sont indépendants, on a*

$$P_A(B) = P(B)$$

Remarque. *Quand deux événements sont indépendants, cela signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.*

À ne pas confondre avec des événements ***incompatibles*** *($P(A \cap B) = 0$).*

Démonstration. Voir cahier. □

Proposition 7. *Soit A et B deux événenements indépendants de Ω. Alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.*

Démonstration. Voir cahier. □

4.2 Succession d'expériences indépendantes

Remarque. *Quand on réalise successivement deux expériences aléatoires telles que les événements de la premières sont tous indépendants avec ceux de la seconde, on dit que l'on réalise une* ***succession d'expériences indépendantes****.*

Autrement dit, deux expériences aléatoire sont dites indépendantes quand le résultat de la première n'a pas d'influence sur le résultat de la seconde.

Fonction Exponentielle

Premières Spécialité Mathématiques

1 Définition de la fonction exponentielle

Définition 1. *La fonction exponentielle, notée* exp*, est l'unique fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, dérivable sur* $\mathbb{R}$*, solution de l'équation différentielle*

$$f' = f$$

avec condition initiale $f(0) = 1$*.*

Remarque.

- ***« solution »*** *: La fonction* exp *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{cases} \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

.

- ***« unique »*** *: si une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *vérifie que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

alors $f = \exp$*.*

Exemple.

a) Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 3x + \exp(x) \end{array}$*. Justifier que* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, puis calculer sa dérivée.*

b) Soit $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-5x + 2) \end{array}$*. Justifier que* h *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, puis calculer sa dérivée.*

Remarque. *L'unicité de la fonction exponentielle se montre de façon « classique » : On considère deux fonctions* f *et* g *vérifiant les mêmes propriétés que la fonction exponentielle, et on montre qu'elles n'ont pas d'autres choix que d'être égales (*$f(x) = g(x)$ *pour tout* x*).*

2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

Théorème 1. *Soit x, y deux réels. Alors*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Remarque. ***La fonction exponentielle transforme les sommes en produit.***

Démonstration. Soit y un nombre réel quelconque fixé. On pose $g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} \end{array}$ (on admet que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que sa dérivée est nulle. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

b) À l'aide de $g(0)$, en déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) En conclure que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

□

Corollaire 1. *Soit x, y deux réels. Alors,*

$$\begin{cases} \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \\ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \\ \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)} \end{cases}$$

Définition 2. *Soit a un réel. Alors la suite $(\exp(n \times a))_{n\in\mathbb{N}}$ est une* ***suite géométrique*** *de premier terme 1 et de raison $\exp(a)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\exp(na) = \exp(a)^n$$

Démonstration. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(na)$. Étudier u_{n+1} en fonction de u_n, puis déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. □

En particulier, on va s'intéresser à $a = 1$.

Définition 3. *Le nombre $e = \exp(1)$ est appelé* ***constante de Néper****, et vaut approximativement* 2,718...
La fonction exponentielle utilise la notation suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = e^x$$

Remarque. *La raison pour laquelle la notation e^x a été adoptée est pour correspondre avec les propriétés algébriques associées aux puissances :*

$$\begin{cases} e^{x+y} = e^x e^y \\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \\ e^{nx} = (e^x)^n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemple. *Simplifier les expressions suivantes :*

a) $(e^{-2})^2 \times (e^{-3})^2$

b) $\dfrac{(e^{-2})^2}{e^{-5}}$

c) $e^3 \times (e^{-3} + e^4)$

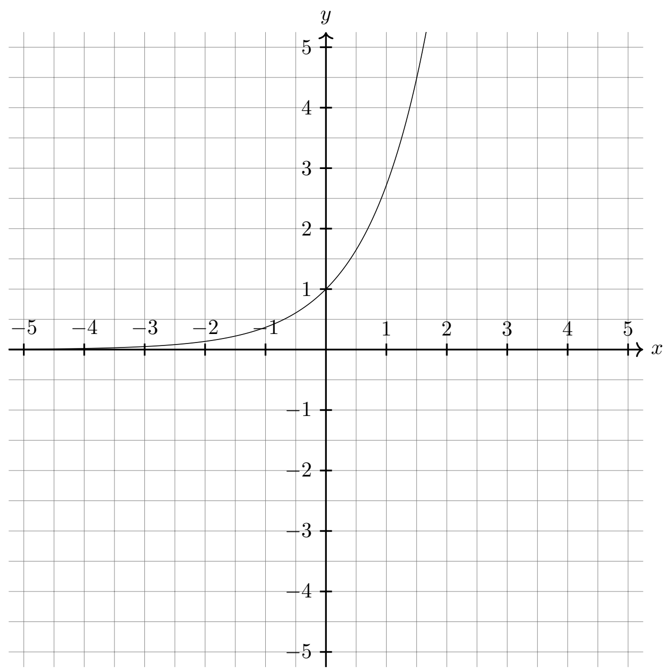
d) $(e^5)^5 - e^2 \times e^2$

e) $(e^{3x})^3 \times (e^{-3x})^3$

f) $\dfrac{(e^{-5x+3})^4}{e^{-x+2}}$

3 Étude de la fonction exponentielle

On représente sur ce repère la courbe représentative de la fonction exponentielle.



Proposition 1. *La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(x) > 0$$

Proposition 2. *Le fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de exp		1	

Proposition 3. *Soit x et y deux nombres réels. Alors,*

$$\begin{cases} \exp(x) = \exp(y) & \Leftrightarrow x = y \\ \exp(x) < \exp(y) & \Leftrightarrow x < y \end{cases}$$

Exemple. *Résoudre* $\exp(x^2-1) = 1$ *est équivalent à résoudre* $\exp(x^2-1) = \exp(0)$*, et donc est équivalent à résoudre* $x^2 - 1 = 0$.

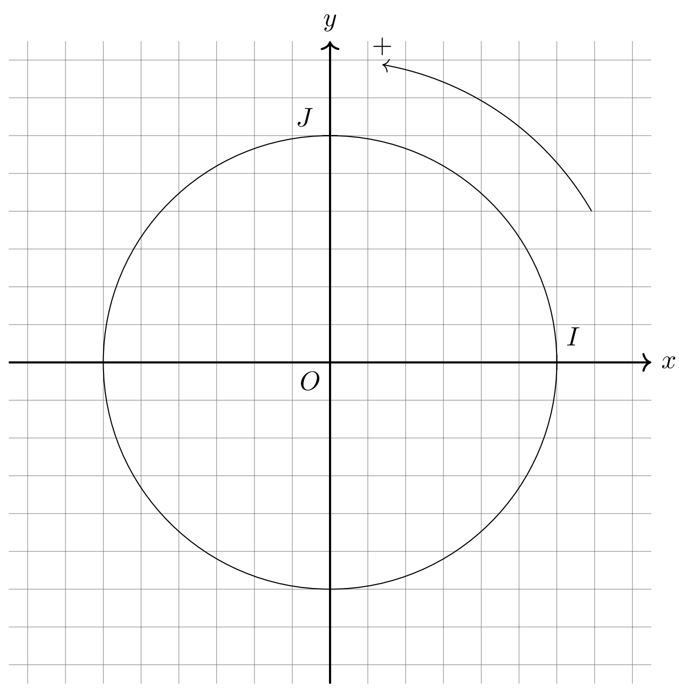
Chapitre 8 : Trigonométrie

Première Spécialité Mathématique

1 Cercle trigonométrique : Mesure d'angle

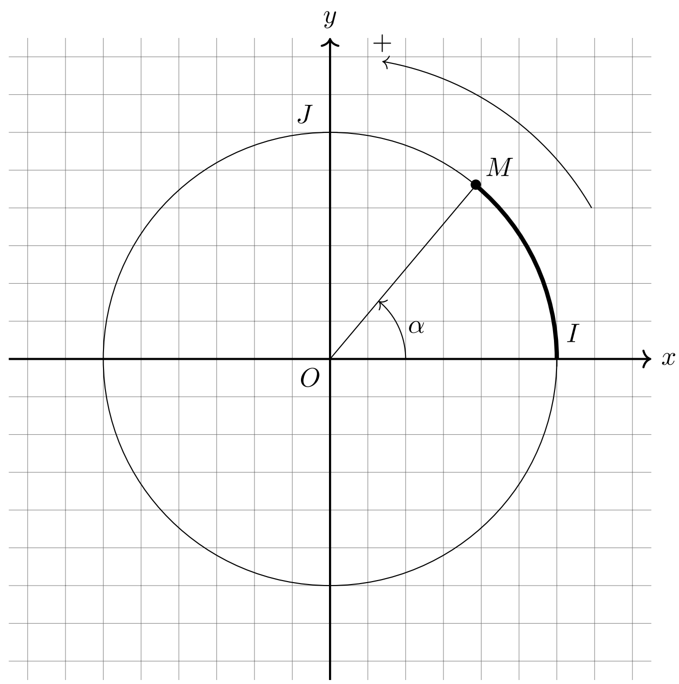
Définition 1. *Soit* $(O; I; J)$ *un repère orthonormée. Le* ***cercle trigonométrique*** *est le cercle de centre* O *et de rayon* $OI = 1$*. Le cercle est muni d'une orientation :*

- *Le sens direct ou trigonométrique est le sens antihoraire ;*
- *Le sens indirect est le sens horaire.*



Remarque. *Le but du cercle trigonométrique est de définir une notion de mesure d'angle « universelle ».*

Définition 2. *Soit M un point du cercle trigonométrique. Sa position est entièrement déterminée par l'angle formé par les demi-droites $[OI)$ et $[OM)$.*
Une mesure de l'angle est donnée par la longueur d'un parcours sur le cercle partant de I et arrivant à M. Cette mesure est positive si le chemin a été parcouru dans le sens trigonométrique, négative sinon. L'unité de mesure est le ***radian****.*



Remarque. *Il y a une infinité de parcours partant de I et arrivant à M. Il suffit d'ajouter un certain nombre de tours complets du cercle.*
Il y a donc une infinité de mesure d'angle possible pour un même angle.

Proposition 1. *Soit un angle dont une des mesures en radian est α. Alors, les autres mesures de cet angle sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*
Seule une seule de ces mesures est dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$: on l'appelle ***mesure principale*** *de l'angle.*

Remarque. *Ce tableau répertorie les mesures principales d'angle classique en radian.*

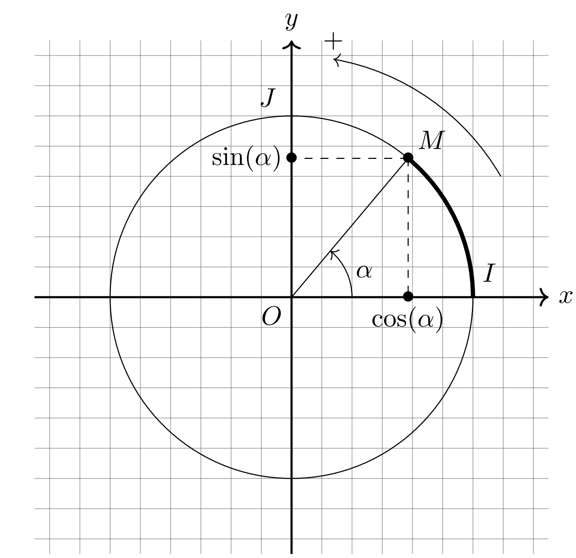
Degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

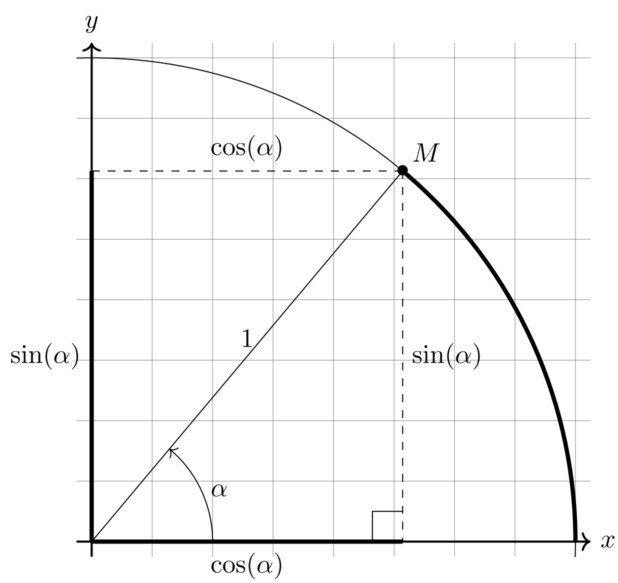
2 Sinus et Cosinus

2.1 Définition

Définition 3. *Soit α un nombre réel. On note M un point du cercle trigonométrique tel que α est une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{IOM}$. Alors,*

- *le cosinus de α, noté $\cos(\alpha)$, est défini comme étant* ***l'abscisse*** *du point M ;*
- *le sinus de α, noté $\sin(\alpha)$, est défini comme étant* ***l'ordonnée*** *du point M.*



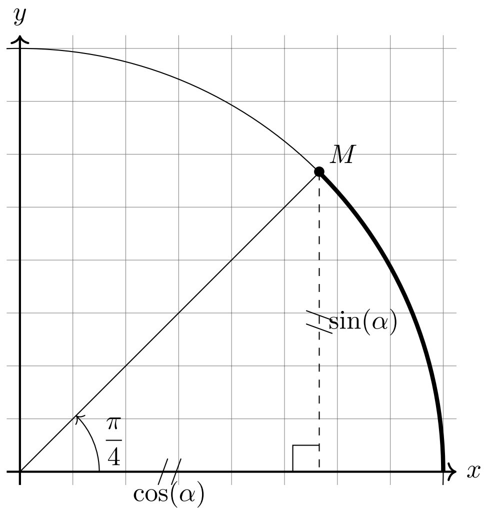


Théorème 1. *Soit α un nombre réel. Alors,*

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$$

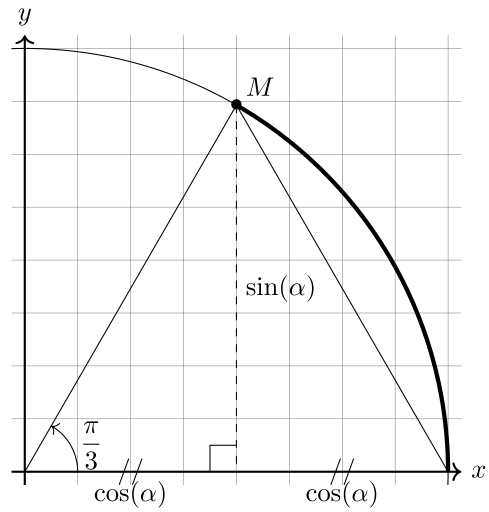
2.2 Valeurs remarquables

2.2.1 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$



$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \\ (cos(\alpha))^2 + (sin(\alpha))^2 = 1 \end{cases}$$

2.2.2 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$



$$\begin{cases} 2cos(\alpha) = 1 \\ (cos(\alpha))^2 + (sin(\alpha))^2 = 1 \end{cases}$$

Remarque. *En résolvant ces « problèmes de géométrie », on en déduit ces valeurs particulières de* $\cos(\alpha)$ *et* $\sin(\alpha)$. *C'est comme cela que l'on obtient le tableau suivant :*

α *(en Degrés)*	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α *(en Radians)*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

La méthode pour reproduire les deux dernières lignes du tableau est la suivante :

1. *On commence avec la ligne* $\sin(\alpha)$ *;*
2. *On numérote les cases dans l'ordre de gauche à droite en partant de* 0 *:* $0; 1; 2; 3; 4$ *;*
3. *On divise chaque case par* 2 *;*
4. *On prend la racine carrée du numérateur ;*
5. *On simplifie ce qu'il y a à simplifier (par exemple,* $\sqrt{4} = 2$*)*
6. *Pour la ligne* $\cos(\alpha)$, *on reproduit la ligne* $\sin(\alpha)$ *mais de droite à gauche…*

3 Fonctions sinus et cosinus

3.1 Définition et courbes représentatives

À chaque nombre réel x l'on peut associer un sinus $\sin(x)$ et un cosinus $\cos(x)$, le sinus et le cosinus peuvent donc être considérées comme des fonctions.

Définition 4.

- *La fonction **sinus** est la fonction définie par :*

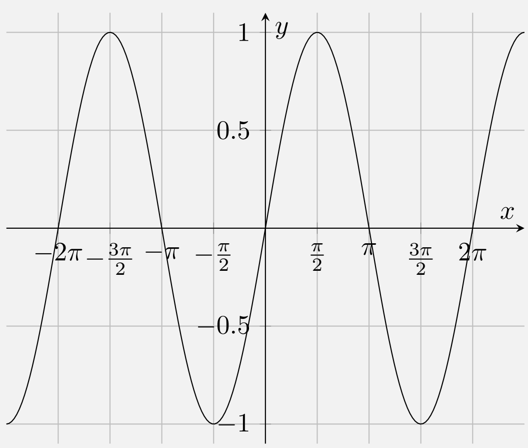
$$\begin{array}{rccl} \sin\colon & \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

- *La fonction **cosinus** est la fonction définie par :*

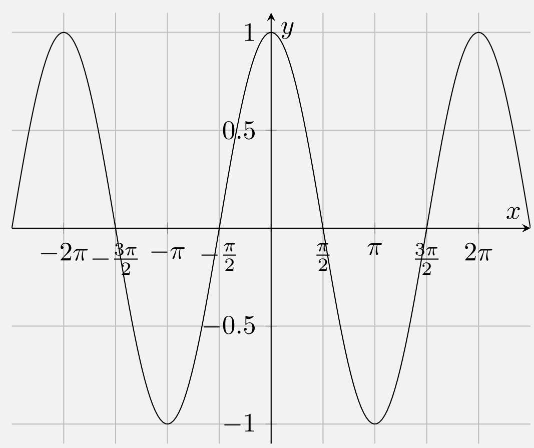
$$\begin{array}{rccl} \cos\colon & \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

Proposition 2. *Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont données par :*

$x \mapsto \sin(x)$



$x \mapsto \cos(x)$



3.2 Propriétés : Périodicité et Parité

Proposition 3. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques : pour tout x réels, on a*

$$sin(x + 2\pi) = sin(x) \quad \text{et} \quad cos(x + 2\pi) = cos(x)$$

Remarque. *Cette proposition se constate sur les courbes représentatives de ces fonctions : « les vagues se répètent sur chaque intervalle de taille 2π ».*

Proposition 4.

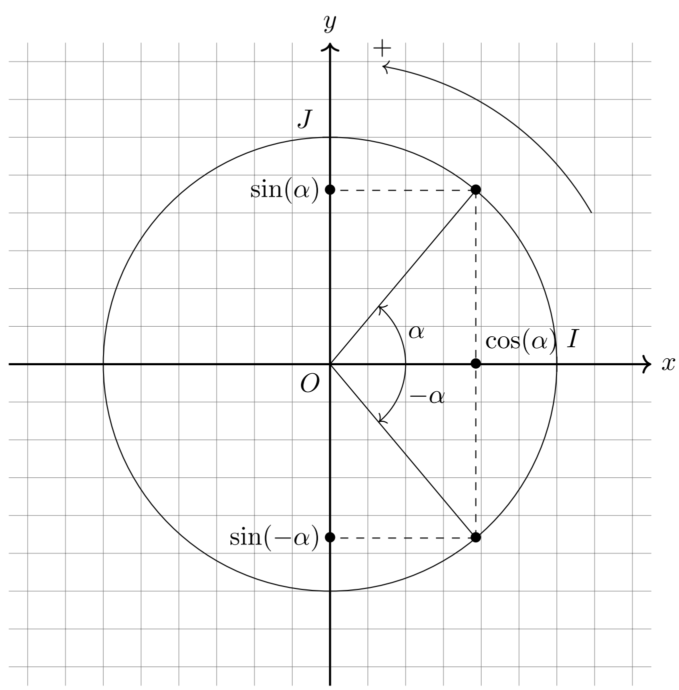
- *La fonction sinus est **impaire** : pour tout x réel, on a*

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- *La fonction cosinus est **paire** : pour tout x réel, on a*

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Remarque.
- *Du point de vue des courbes représentatives, cette propriété est illustrée par le fait que la courbe du sinus admet pour centre de symétrie l'origine du repère, alors que le cosinus admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.*
- *Du point du cercle trigonométrique, cette propriété est la réponse à la question « Comment se comporte le sinus et le cosinus si l'on parcours le cercle dans le sens indirect (négatif) ? ».*



Produit scalaire, orthogonalité

Première Spécialité Mathématiques

1 Géométrie non repérée

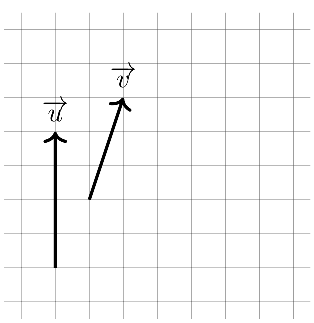
1.1 Angle orienté

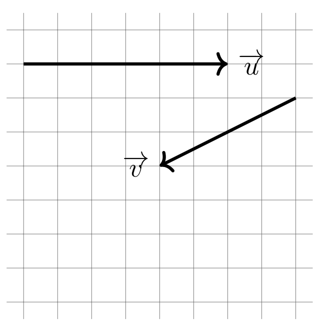
On se place sur le plan. **On choisira le radian comme unité de mesure des angles.**

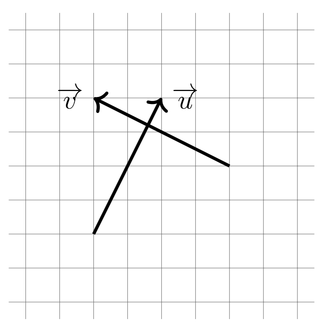
Définition 1. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Alors, la norme de $\overrightarrow{u}$ (sa « longueur ») est notée $\|\overrightarrow{u}\|$.*

Définition 2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose A, B, C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On note $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$ l'angle **orienté** $\widehat{BAC}$.*

Exemple. *Pour chaque couple de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants, construire trois points A, B et C tels que $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \widehat{BAC}$.*







1.2 Première définition du produit scalaire

Définition 3 (Produit scalaire)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On appelle* ***produit scalaire*** *de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le nombre :*

- 0 *si $\overrightarrow{u}$ est nul ou $\overrightarrow{v}$ est nul.*
- $\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ *dans le cas contraire.*

Remarque. ***Le produit scalaire entre deux vecteurs est un nombre !!***

1.3 Propriétés algébriques

Proposition 1. *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan, ainsi que $k \in \mathbb{R}$.*

- *On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.*
- *On a $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.*
- *On a $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.*

Remarque.

- *Attention à l'usage de $\cdot$ et de $\times$: l'un concerne deux vecteurs, et l'autre deux nombres.*
- *Ces résultats montre que le produit scalaire se comporte comme le produit entre nombres : commutativité ; associativité et distributivité.*

Exemple. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}} = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer les produits scalaires suivants.*

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$

b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} =$

c) $\overrightarrow{v} \cdot (2\overrightarrow{u}) =$

d) $(-4\overrightarrow{u}) \cdot (3\overrightarrow{v}) =$

1.4 Propriétés géométriques

Proposition 2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.*

- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$;*
- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$;*

Définition 4. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors ces deux vecteurs sont dit **orthogonaux** si l'un des deux vecteurs est nul ; ou si l'angle $\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}} = 90$.*

Proposition 3. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.*

Remarque.

- *Cette proposition est facile à démontrer avec notre définition, mais sera surtout utile avec les définitions suivantes.*
- *Le vecteur nul est donc orthogonal à tous les vecteurs.*

1.5 Définition avec le projeté orthogonal

Définition 5 (Rappel)**.** *Soit M un point du plan et (d) une droite. Le **projeté orthogonal** de M par rapport à la droite (d) est l'unique point M' appartenant à la droite (d) et tel que les droite (MM') et (d) sont perpendiculaires.*

Proposition 4. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. De plus, on pose H le projeté orthogonal de C par rapport à la droite AB. Alors,*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens ;} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés.} \end{cases}$$

2 Géométrie repérée

On munit le plan d'un repère orthonormée (O, I, J). Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'abscisse x et d'ordonnée y sont notées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.1 Définition en géométrie repérée

Proposition 5. *Soient deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\binom{x_u}{y_u}$ *et* $\overrightarrow{v}\binom{x_v}{y_v}$*. Alors, le produit scalaire* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ *est égal à*

$$x_u \times x_v + y_u \times y_v$$

Exemple. *Calculer le produit scalaire des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *suivants*

a) $\overrightarrow{u}\binom{2}{3}$ *et* $\overrightarrow{v}\binom{3}{4}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$

b) $\overrightarrow{u}\binom{1}{-7}$ *et* $\overrightarrow{v}\binom{3}{4}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$

c) $\overrightarrow{u}\binom{-4}{5}$ *et* $\overrightarrow{v}\binom{5}{4}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$

d) $\overrightarrow{u}\binom{6}{9}$ *et* $\overrightarrow{v}\binom{9}{12}$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$

2.2 Produit scalaire et norme

Proposition 6. *Soit* $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ *un vecteur. Alors,*

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x^2 + y^2$$

Proposition 7 (Identités remarquables)**.** *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs. Alors*

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 & = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 & = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) & = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 \end{cases}$$

Proposition 8. *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs. Alors,*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \left\|\overrightarrow{u - v}\right\|^2)$$

3 Application : cercle

Soient deux points A et B. On pose I le milieu du segment $[AB]$.

Proposition 9. *Soit M un point quelconque du plan. Alors,*

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration. En effet, on rappelle que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \quad \text{(Relation de Chasles)} \\
&= (\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \quad \text{(Définition du milieu)} \\
&= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + (-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)) \cdot \overrightarrow{MI} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.
\end{aligned}$$

□

Proposition 10. *Soit M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ avec M différent de A et B. Alors, le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.*

Démonstration. De par la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\
\Leftrightarrow &MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 \\
\Leftrightarrow &MI = \frac{1}{2}AB \\
\Leftrightarrow &MI = AI = BI
\end{aligned}$$

Donc le point M est à la même distance de I que ne le sont les points A et B. On en déduit qu'ils sont tous les trois sur le même cercle de centre I. Mais comme I est le milieu de $[AB]$, on en déduit que $[AB]$ est le diamètre du cercle en question. On en conclut la proposition. □

4 Application : triangle

Théorème 1 (Formule d'Al-Kashi)**.** *Dans un triangle quelconque ABC, on a la formule*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Démonstration. On remarque par la relation de Chasles que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
BC^2 &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2\left\|AC\right\|\left\|AB\right\|\cos(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}) \\
&= AC^2 + AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})
\end{aligned}$$

□

5 Application : droite

Soit (d) une droite.

Définition 6. *On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est* ***normal à la droite*** *(d) s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de (d).*

Proposition 11. *Soit (d) une droite du plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors,*

- *Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de la droite ;*
- *Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\overrightarrow{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à la droite.*

Réciproquement, si une droite (d) admet une vecteur $\overrightarrow{n}\binom{a}{b}$ comme vecteur normal, alors il admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c = 0$

Chapitre 10 : Variables Aléatoires Réelles

Première Spécialité Mathématiques

Durant le chapitre, on s'intéresse à une expérience aléatoire d'univers fini Ω.

1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1. *Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui se note*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Remarque. *Pour comprendre ce formalisme, il faut comprendre qu'une variable aléatoire réelle est une grandeur numérique dont la valeur dépend du résultat de l'expérience aléatoire. Par exemple :*

- *Votre mise remportée à un jeu d'argent se modélise avec une variable aléatoire ;*
- *Le nombre de gens qui répond à votre campagne de sondage se modélise avec une variable aléatoire ;*
- *Le nombre de nuits qu'il faut attendre avant de voir une étoile filante se modélise avec une variable aléatoire.*

Définition 2. *Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre dans $\mathbb{R}$. Alors, les ensembles suivants sont des événements de l'expérience aléatoire :*

- $\{X = a\}$ *« la variable X vaut a »*
- $\{X \leq a\}$ *« la variable X est un nombre inférieur ou égal à a »*
- $\{X < a\}$ *« la variable X est un nombre strictement inférieur à a »*
- $\{X \geq a\}$ *« la variable X est un nombre supérieur ou égal à a »*
- $\{X > a\}$ *« la variable X est un nombre strictement supérieur à a »*

Remarque. *Quand on calcule une probabilité que X vaille une certaine valeur, on écrit donc quelque chose de la $P(X = a)$ ou $P(X \leq a)$, etc...*

Exemple. *On place dans une urne opaque trois boules rouges, deux boules vertes et une boule bleue indiscernables au toucher. On mise $2€$ pour jouer au jeu suivant :*

- *On ne gagne rien si on tire une boule rouge*
- *On gagne $2€$ si on tire une boule verte*
- *On gagne $5€$ si on tire une boule bleue*

On note X le gain remporté à la suite de ce jeu. Déterminer les probabilités $P(X = 5)$ et $P(X \geq 0)$.

Définition 3. *Établir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X consiste à construire le tableau associant à chaque valeur a pouvant être prise par la variable X la probabilité $P(X = a)$*

a	a_1	a_2	$\dots$	a_n
$P(X = a)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Exemple. *On tire à pile ou face deux fois de suite avec une pièce équilibrée. Pour chaque face obtenue, on gagne 1€ et pour chaque pile obtenue, on perd 1€. On note X le gain suite à ce jeu. Établir la loi de X en complétant le tableau*

a				
$P(X = a)$				

2 Espérance, Variance, Écart type

Définition 4. *Soit X une variable aléatoire, dont la loi est donnée par le tableau suivant :*

a	a_1	a_2	$\dots$	a_n
$P(X = a)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Alors,

- *l'**espérance** de X, notée $E(X)$, est définie par*

$$E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n = a_1P(X = a_1) + a_2P(X = a_2) + \cdots + a_nP(X = a_n)$$

- *La **variance** de X, notée $V(X)$, est définie par*

$$V(X) = p_1(a_1 - E(X))^2 + p_2(a_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(a_n - E(X))^2$$

- *L'**écart type** de X, noté $\sigma(X)$, est définie par*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque.

- *L'espérance permet de modéliser la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X après une grande répétition de la même expérience. Par exemple, si l'on fait 100 tirages à pile ou face, on peut espérer avoir 50 faces au terme de ces lancers.*
- *Si l'espérance représente la moyenne de X, alors sa variance (et son écart type) représente son « écart »à la moyenne. Une grande variance signifie qu'en répétant l'expérience un grand nombre de fois, les valeurs prises par X seront dispersées et éloignées autour de la moyenne. Une petite variance, au contraire, signifie que les valeurs prises par X sont « serrées »autour de la moyenne.*